Design af bro

Opgave 2.2

a) **Opstil en ligning for den cirkel, der går gennem punkterne *A, Q og B*.**
For at opstille en ligning for den cirkel, der går gennem punkterne A, Q og B, skal man bruge cirklens ligning, som ser således ud:

$$(x - x0)^2 + (y - y0)^2 = r^2$$

(x_0, y_0) = cirklens centrum
r = 1000m
Punkt Q = $(0, y_Q)$ = (0,11)

For at finde frem til cirklens centrums y-koordinat, skal r trækkes fra Q's y-værdi:

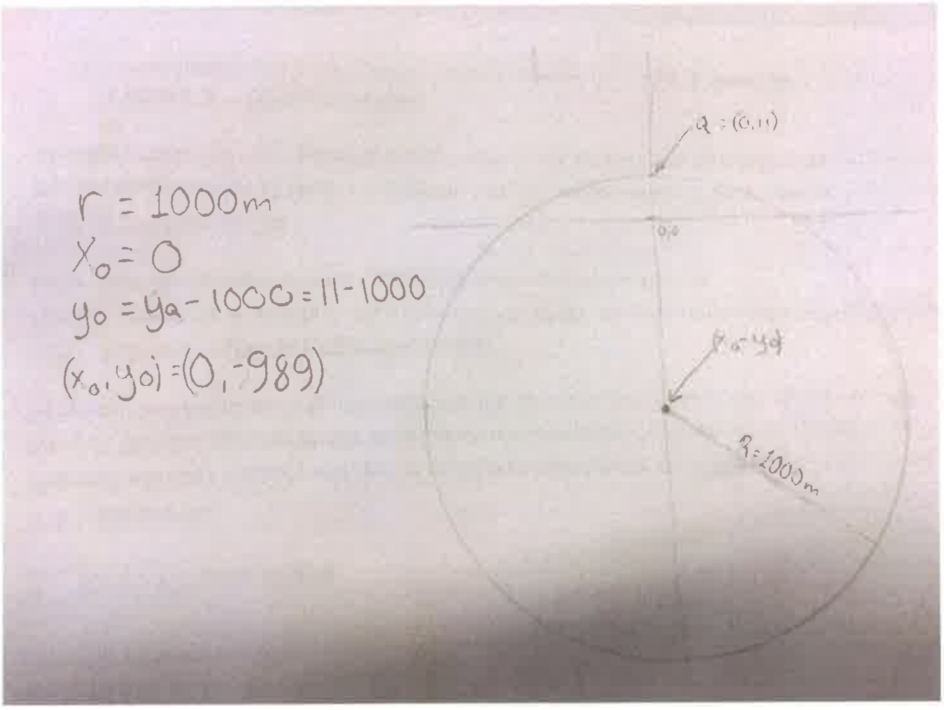
$$y_Q - r = y_0$$

$$11 - 1000 = -989$$

Koordinaterne for cirklens centrum samt radius sættes ind i cirklens ligning, og der er hermed opstillet en ligning, for den cirkel, der går gennem punkterne A, Q og B:

$$(x - 0)^2 + (y - (-989)^2 = 1000^2$$

__Ligningen for cirklen gennem punkterne A, Q og B er $(x - 0)^2 + (y - (-989)^2 = 1000^2$__



b) Angiv funktionsforskriften for den del af cirklen (cirkelbue), der er afgrænset af *A* og *B*.

For at finde funktionsforskriften for den del af cirklen, der er afgrænset af A og B, skal vi isolere y, hvorved y bliver udtrykt som en funktion af x.

Der tages udgangspunkt i cirklens ligning for cirklen, der går gennem A, Q og B:

$$(x-0)^2+(y-(-989)^2=1000^2$$

$$(y-(-989)^2=1000^2-(x-0)^2$$

$$y-(-989)=\pm\sqrt{1000^2-(x-0)^2}$$

$$y=(-989)\pm\sqrt{1000^2-(x-0)^2}$$

$$y=(-989)\pm\sqrt{10^6-x^2}$$

Da vi regner på funktionsforskriften for den øvre cirkelbue, tager vi udgangspunkt i den positive ligning.

$\underline{\underline{\mathit{Funktionsforskriften\ for\ den\ del\ af\ cirklen, der\ er\ afgrænset\ af\ A\ og\ B\ er\ altså}}}$
$\underline{\underline{y=(-989)+\sqrt{10^6-x^2}}}$

c) Angiv definitionsmængden for funktionen i spm. b.

Definitionsmængden for funktionen $y=(-989)\pm\sqrt{10^6-x^2}$ finder vi ved hjælp af den vandrette afstand mellem afstivningerne, der er angivet som 12,5 m.

Dm(f) = [x_A;x_B]

$$4\cdot 12{,}5=50$$

x_b = 50

Da buen er symmetrisk omkring y-aksen, må 50 altså være den numeriske værdi af x_a.

X_a = -50

$$Dm(f)=[Xa;xb]=[-50;50]$$

<u>*Definitionsmængden for funktionen $y=(-989)+\sqrt{10^6-x^2}$ afgrænset af A og B er altså [-50;50]*</u>

d) Angiv funktionsforskriften for den parabel, der går gennem punkterne *A, T og B*.

For at kunne finde funktionsforskriften for den parabel, der går gennem A, T og B, tages der udgangspunkt i formlen for en 2. gradsligning, da denne definerer funktionsforskriften for en parabel:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Da parablens toppunkt (0 ; 25) har en x-værdi på 0, må det betyde at den netop her skærer y-aksen. Da c angiver skæring med y aksen, og b angiver parablens toppunkts skydning i forhold til x-aksen kan vi konkludere følgende, at c= 25 *og* b= 0

Med disse kendte værdier ser vores andengradsligning nu således ud:

$$y = ax^2 + 25$$

B's koordinatsæt kan nu findes ved at sætte x-værdien ind i funktionsforskriften for AQB.

$$y = (-989) \pm \sqrt{10^6 - x^2}$$

$$y = (-989) + \sqrt{10^6 - 50^2} = 50 \cdot \sqrt{399} - 989 \approx 9{,}749218$$

Nu kender vi x og y i vores andengradsligning og kan derefter isolere a:

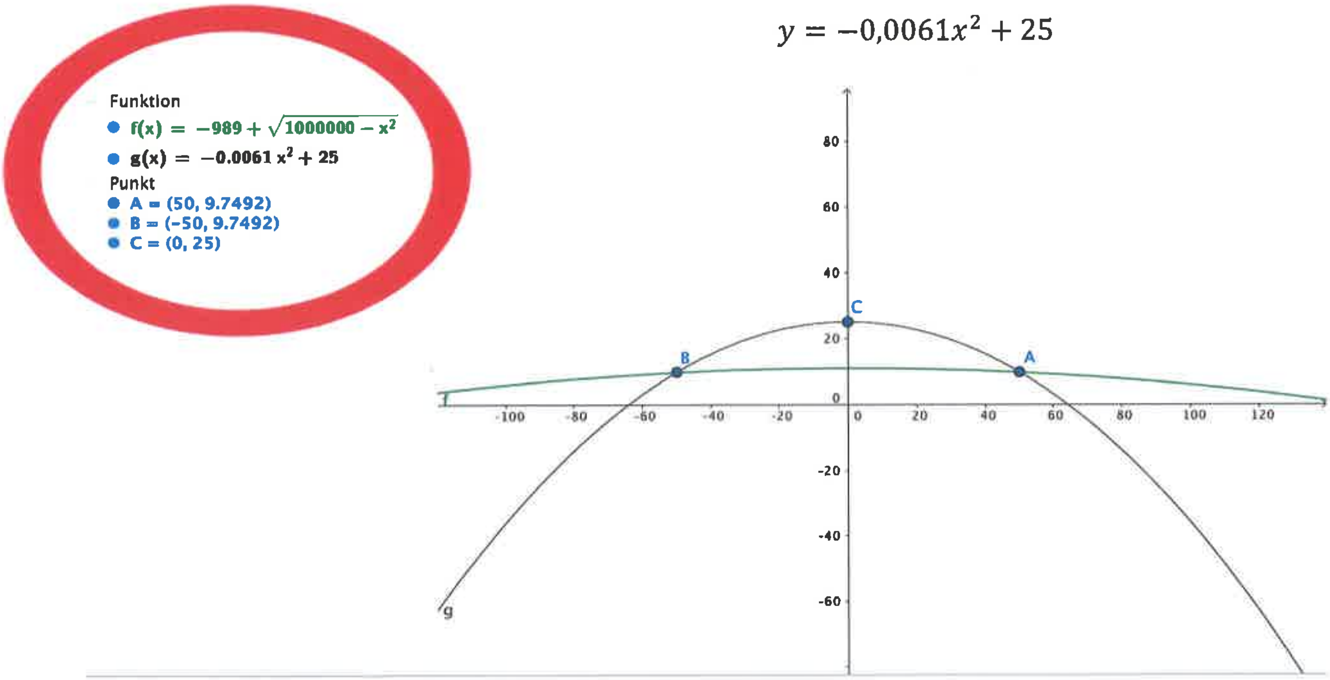
$$9{,}749218 = a \cdot 50^2 + 25$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMatMac.*

$$a = -0{,}0061003128$$

Nu har vi alle konstanternes værdier og funktionsforskriften for parablen ser således ud:

$$y = -0{,}0061x^2 + 25$$



Vi har brugt Geogebra til at bekræfte vores funktionsforskrift

<u>*Funktionsforskriften for parablen der går gennem A, T og B er altså* $y = -0{,}0061x^2 + 25$</u>

Beregn *y-koordinaterne* til *D og E.*

y-koordinaten for punkt D kan findes ved at sætte x-værdien 12,5 ind i funktionsforskriften for den del af cirklen, der er afgrænset af A og B:

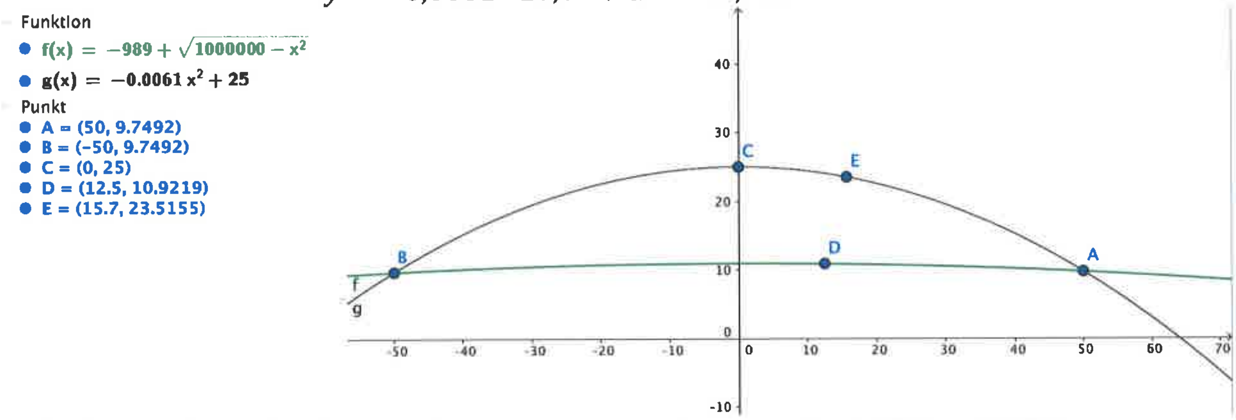
$$y = (-989) \pm \sqrt{10^6 - x^2}$$

$$y = (-989) + \sqrt{10^6 - 12{,}5^2} = 10{,}92187$$

y-koordinaten for punktet E, findes ved at sætte x-værdien 15,6 ind i funktionsforskriften for parablen ATB:

$$y = -0{,}0061x^2 + 25$$

$$y = -0{,}0061 \cdot 15{,}6^2 + 25 = 23{,}5155$$



Punkterne er her sat ind i Geogebra, hvor man kan se, at de ligger præcist på cirklen og parablen.

<u>*y-koordinaterne til punkterne D og E er altså 10,9 og 23,5*</u>

e) Beregn længden af afstivningen *DE.*

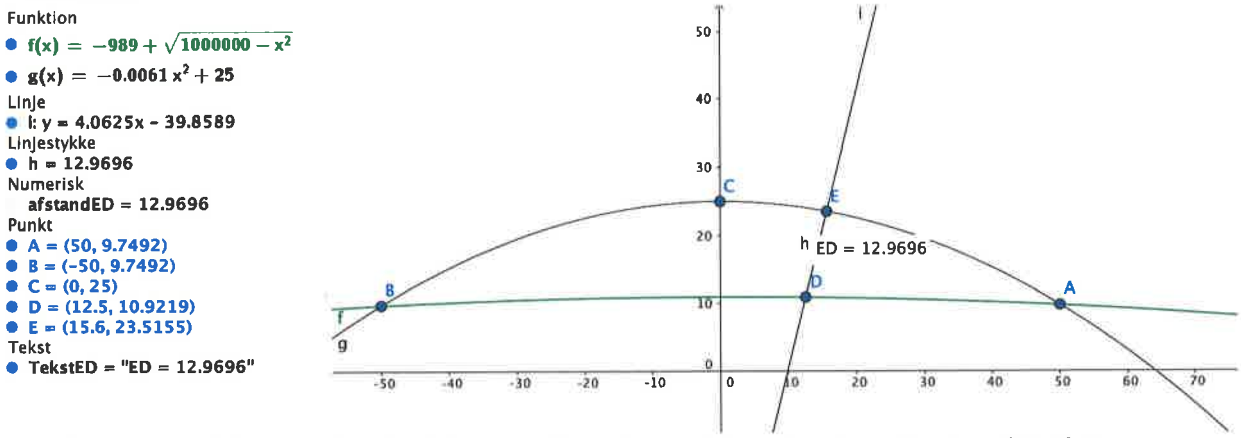
For at finde afstanden DE skal afstandsformlen benyttes:

$$DE = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$

D = (x_1,y_1) = (12.5,10.9)
E = (x_2,y_2) = (15.6,23.5)

De to koordinatsæt sættes ind i afstandsformlen:

$$DE = \sqrt{(15{,}6 - 12{,}5)^2 + (23{,}5155 - 10{,}92187)^2} = 12{,}96956$$



Længden har vi også fundet ved hjælp af Geogebra. Vi har tegnet linjestykket DE og fået Geogebra til at angive længden.

<u>*Længden af afstivningen DE er altså 12,9696 m*</u>

f) Angiv funktionsforskriften for den rette linje, *l*, der går gennem punkterne *D og E*.

For at finde funktionsforskriften for en lineær funktion, y = ax + b, skal vi finde funktionens a- og b-værdi.
a-værdien findes med formlen for hældningskoefficienten:

$$a = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

De kendte koordinatsæt for D og E sættes ind:

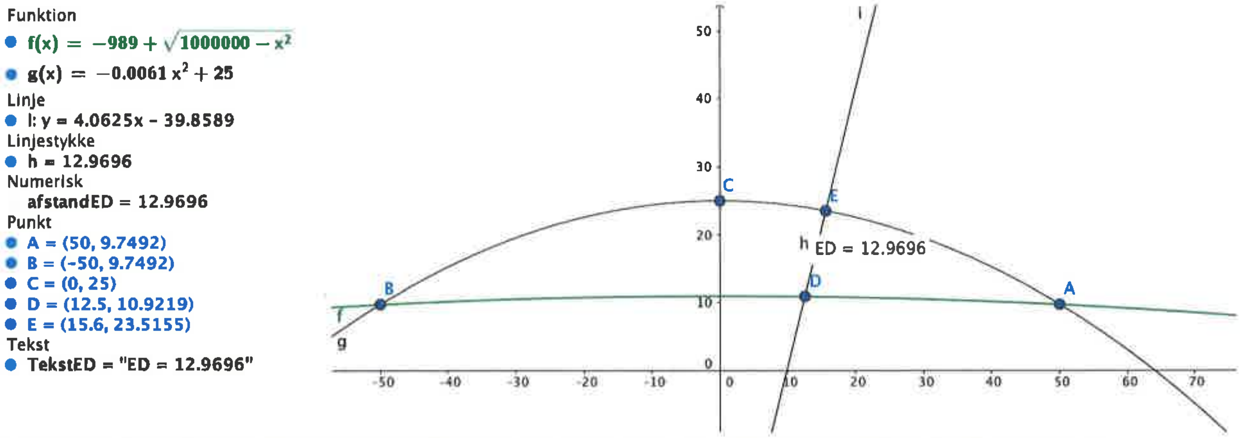
$$a = \frac{23{,}5 - 10{,}9}{15{,}6 - 12{,}5} = 4{,}064516$$

b findes med formlen for skæringen med y-aksen:

$$b = y1 - ax1$$

Ét af de kendte koordinatsæt sættes ind i ligningen:

$$b = 10{,}9 - 4{,}064516 \cdot 12{,}5 = -39{,}90645$$



I Geogebra har vi fundet funktionsforskriften for den rette linje, der går gennem DE og E ved at tegne et linjestykke gennem to punkter og få Geogebra til at angive funktionsforskriften for denne.

<u>*Funktionsforskriften for den rette linje l, der går gennem punkterne D og E er altså*</u>

<u>*y=4,06x-39,91*</u>

g) Find ligningen for tangenten til parablen i punktet E.

For at finde ligningen til tangenten til parablen i punktet E, skal vi bruge tangentligningen:

$$y - f(x0) = f'(x0) \cdot (x - x0)$$

Før vi kan gå i gang, må vi først finde den afledede funktion af parablen i punktet E og f'(x$_0$):

$$f(x) = -0{,}0061x^2 + 25$$

$$f'(x) = -0{,}0122x$$

E=(15.6,23.5)

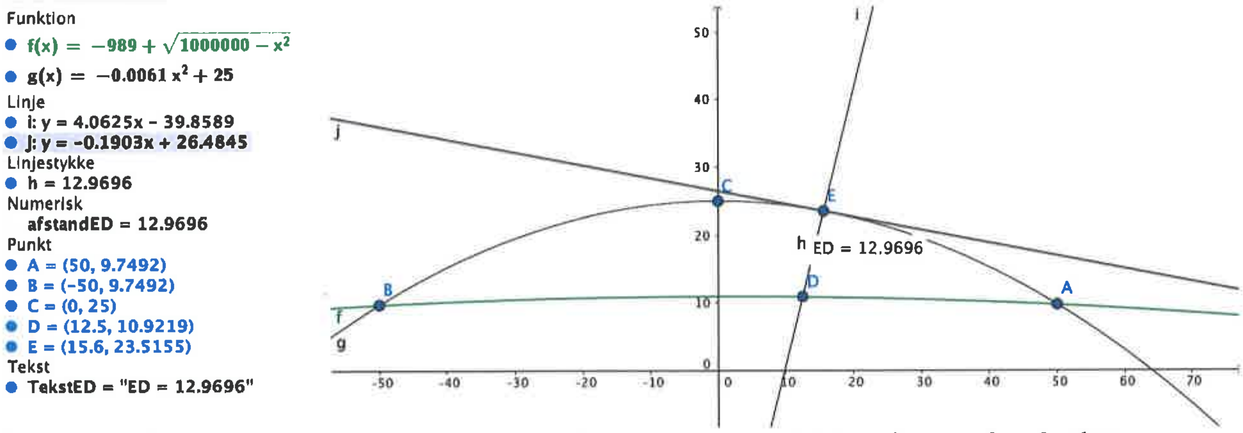
$$f'(xo) = f'(15{,}6) = -0{,}0122 \cdot 15{,}6 = -0{,}19032$$

De kendte værdier sættes nu ind i tangentligningen:

$$y - 23{,}5 = -0{,}19032 \cdot (x - 15{,}6)$$

$$y = -0{,}19032x + 2{,}968992 + 23{,}5$$

$$y = -0{,}19032x + 26{,}468992$$



For at bekræfte vores udregninger, har vi også indsat tangenten i punktet E i Geogebra, som herefter har angivet ligningen for denne.

<u>*Ligningen for tangenten til parablen i punktet E er altså y=-0,1903x+2,46899*</u>

h) Ekstra frivilligt spørgsmål: i punktet B mødes cirkel og parabel. Beregn vinklen mellem de to kurver i dette punkt. (Vink: find hældningen af de to tangenter i dette punkt).

For at finde vinklen i punktet B, må vi først finde tangenterne til de to funktioner i netop dette punkt ved hjælp af tangentligningen.

Vi ved fra før, at den afledede funktion af parablen er:

$$f'(x) = -0{,}0122x$$

B=(50,9.75)

$$f'(x0) = f'(50) = -0{,}0122 * 50 = -0{,}61$$

De kendte værdier sættes nu ind i tangentligningen:

$$y - 9{,}75 = -0{,}61 \cdot (x - 50)$$

$$y = -0{,}61x + 40{,}25$$

Vi finder nu funktionsforskriften for tangenten til cirkelbuen i punktet B:

$$y = -989 \pm \sqrt{10^6 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{10^6 - x^2}}$$

$$f'(x0) = f'(50) = \frac{50}{\sqrt{10^6 - 50^2}} = \frac{1}{\sqrt{399}} \approx 0{,}05006262$$

De kendte værdier sættes nu ind i tangentligningen:

$$y - 9{,}75 = 0{,}05006262 \cdot (x - 50)$$

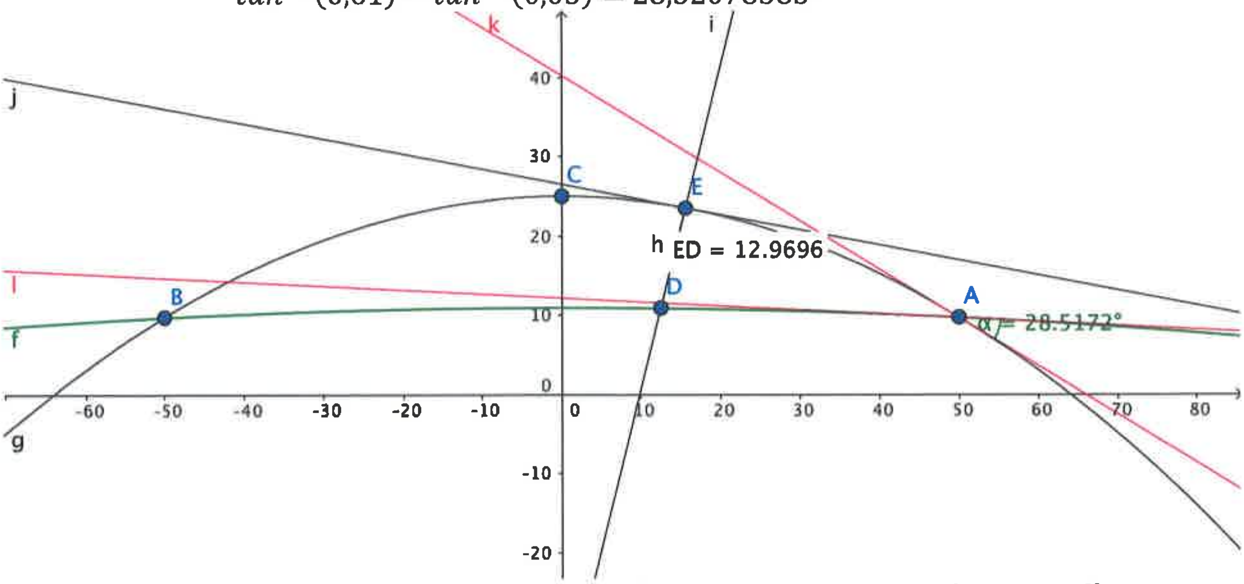
$$y = 0{,}05006262x + 12.2531$$

Vi finder nu vinklen mellem de to kurver, der mødes i punktet B.
Sammenhængen mellem en linjes hældning og dens vinkel til vandret er givet ved:

$$\tan(v) = a \quad \textit{hvoraf} \quad v = \tan^{-1}(a)$$

Den mellemliggende vinkel (mellem linjerne) kan så beregnes som forskellen mellem de to vinkler til vandret

$$tan^{-1}(0{,}61) - tan^{-1}(0{,}05) = 28{,}52078583°$$



For at bekræfte vores udregninger, har vi også indsat tangenterne i Geogebra, samt fået den til at angive vinklen.

<u>Vinklen mellem de to kurver, der mødes i punktet B, er altså 28,5°</u>

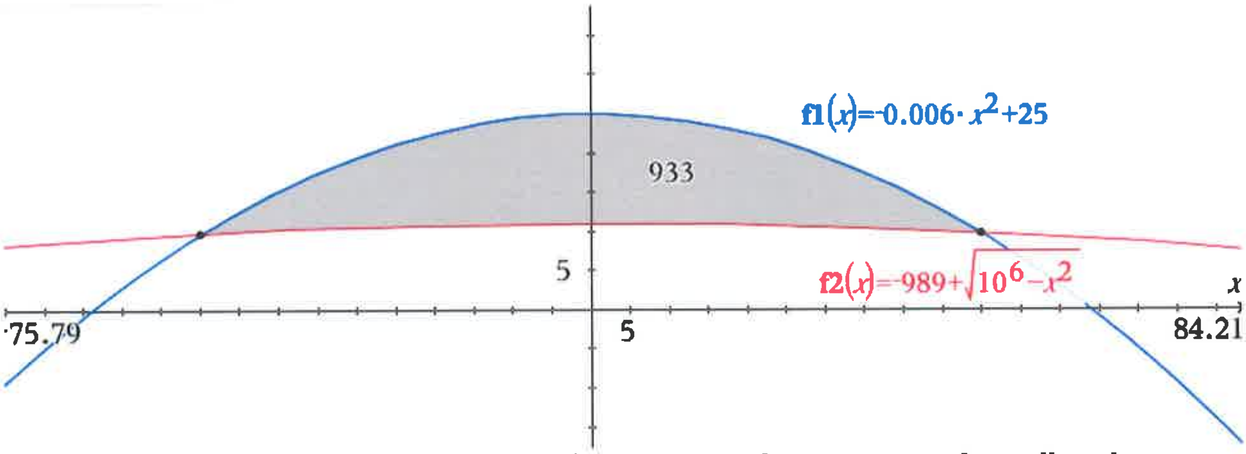
i) Ekstra frivilligt spørgsmål: find arealet af det område der afgrænses af parablen og cirklen (det halvmåneformede område).

For at finde arealet af det område, der afgrænses af parablen og cirklen, bruger vi formlen for arealet mellem to kurver:

$$Areal = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Dette udregnes i TI-Nspire:

$$\int_{-50}^{50} \left(-0{,}0061 \cdot x^2 + 25 - \left(-989 + \sqrt{10^6 - x^2}\right) dx\right) = 933.349$$



For at bekræfte udregningerne har vi også fået TI-Nspire til at angive arealet mellem de to kurver.

<u>Arealet mellem parablen og cirklen er altså 933,349 m²</u>