Rapport 6, skråt kast med blide

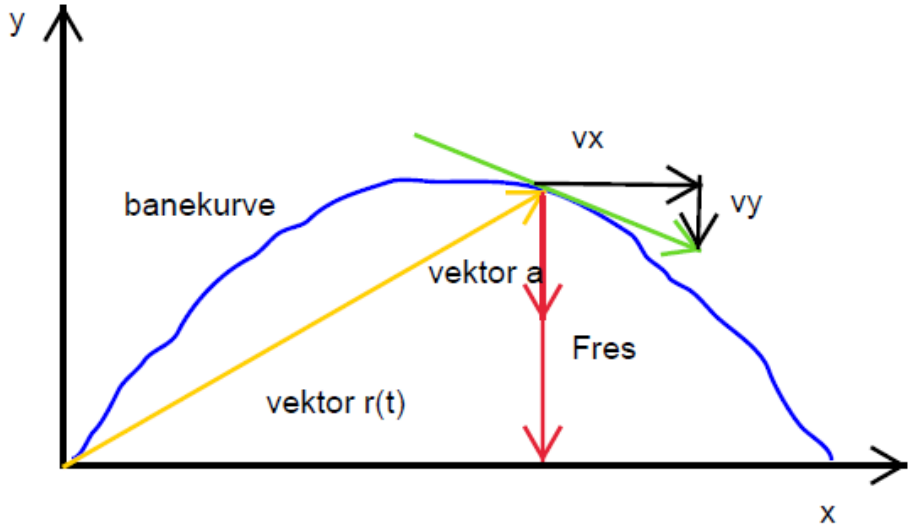
Formål

Formålet med forsøget er at undersøge det skrå kast, bl.a. med fokus på starthastighed, elevation og kastevidde.

Teori

Her følger der teori over det skrå kast

Bevægelse i to dimensioner



Eventuelt billede af et kast. Den blå er banekurven, der er en parabel.

Billede 1

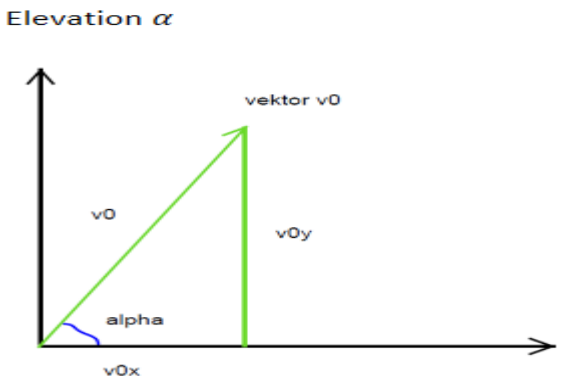
I de følgende sektioner om vektorer tages der udgangspunkt i en parabel, der starter i (0;0)

Omregning mellem de forskellige vektorer

Hvis man har accelerationsvektoren, så er det muligt at finde hastighedsvektoren ved at integrere accelerationsvektoren. Dernæst er det muligt at komme fra hastighedsvektoren og til stedvektoren ved at integrere hastighedsvektoren. Dette er fuldstændig lig mekanikken, hvor man har sted-, hastigheds- og accelerationsfunktionerne. Derfor er det også muligt at komme fra stedvektoren til hastighedsvektoren ved differentiering, og dernæst at komme fra hastighedsvektoren til accelerationsvektoren ved at differentiere igen.

Vektoren til starthastighed

Vektoren til starthastigheden afhænger af elevationen a, alpha



Vektoren til starthastigheden

$$\overline{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 * \cos(\alpha) \\ v_0 * \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Billede 2

Ved hjælp af den ovenstående illustration er det muligt at finde v0x og v0y. Vektoren til starthasithgeden kommer til at se ud på følgende måde.

$$\overline{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 * \cos(\alpha) \\ v_0 * \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Det er vigtigt at kende og kunne udregne disse, da de vil blive brugt i de følgende vektorer.

Accelerationsvektor

Accelerationsvektoren ser ud sådan her:

$$\bar{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x'(t) \\ v_y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Den resulterende kraft og accelerationen går den samme vej, da de er ligefrem proportionale. For at forstå accelerationsvektoren er det vigtigt at forstå den resulterende kraft, som objektet bliver påvirket af.

Den resulterende kraft

Ser man bort fra luftmodstanden, så er den resulterende kraft, som objektet bliver påvirket af

$$\overline{F_{res}} = m * \bar{a} = m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Den resulterende kraft vil dreje ind til den side, som kurven krummer (se billede 1). Det betyder følgende for den resulterende kraft i x-aksen og y-aksen

$$\overline{F_{res}} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m * g \end{pmatrix}$$

Det betyder følgende for accelerationen

$$\overline{F_{res}} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m * g \end{pmatrix}$$

$$\bar{a} = \frac{\overline{F_{res}}}{m} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -m * g \end{pmatrix}}{m} = \begin{pmatrix} \frac{0}{m} \\ \frac{-mg}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Hastighedsvektor

Hastighedsvektoren er tangent til banekurven til det sted, hvor stedvektoren rammer og ser sådan her ud

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

Den findes ved at integrere accelerationsvektoren som vist nedenfor

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} \int a_x dt \\ \int a_y dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int 0 dt \\ \int -g dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ -g * t + v_{0y} \end{pmatrix}$$

Fart

Farten er længden af hastigheden

$$|v| = \left| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

Stedvektor

I et skråt kast er det muligt at finde ud af, hvor objektet, der bliver kastet eller skudt af sted, befinder sig ved hjælp af stedvektoren. x-aksen siger noget om, hvor langt objektet er, og y-aksen siger noget om, hvor højt oppe objektet er. Det vises på følgende måde

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Det kan regnes ud ved at integrere hastighedsfunktionen

$$\bar{r}(t) = \begin{pmatrix} \int v_x dt \\ \int v_y dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} * t + x_0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} * t + y_0 \end{pmatrix}$$

Opsamling på vektorerne

Ved at tage udgangspunkt i en parabel, der starter i (0;0), så kan man komme frem til følgende

Tager udgangspunkt i parabel, der starter i (0;0)

$\bar{r}(t)$	$\begin{pmatrix} v_{0x} * t + x_0 \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} * t + y_0 \end{pmatrix}$
$\bar{v}(t)$	$\begin{pmatrix} v_{0x} \\ -g * t + v_{0y} \end{pmatrix}$
$\bar{a}(t)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$
$\overline{F_{res}}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -m * g \end{pmatrix}$

Bevis for banekurven

Banekurven for det skrå kast er en parabel. Det kan bevises på følgende måde

Man har to formler

$$x = v_{0x} * t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} * t$$

Man får et tip, der siger, at man kan vil have y udtrykt ved x. Så man isolerer t

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

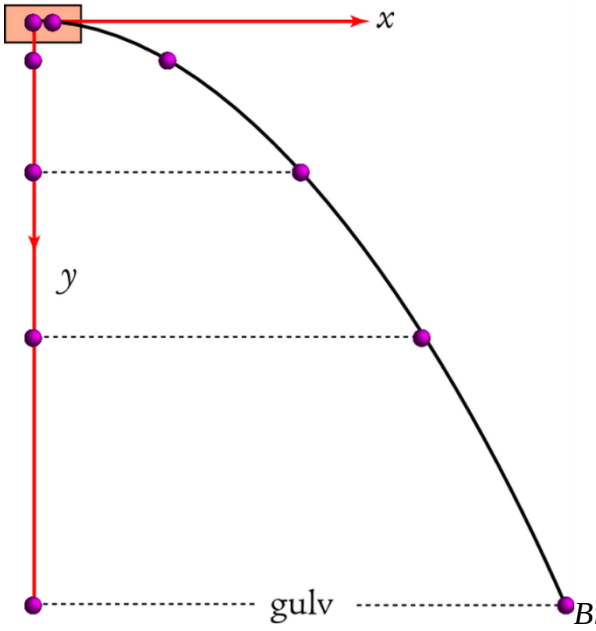
Dette t indsættes på t's plads plads i ligningen for y

$$y = -\frac{1}{2} * g * \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 * v_{0y} * \left(\frac{x}{v_{0x}}\right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} * \frac{g}{v_{0x}} * x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} * x$$

Dette er et andengradspolynomium, som har graf som en parabel. Det vil sige, at banekurven for det skrå kast er en parabel.

Uafhængighedsprincippet (formuleret af Galilei)

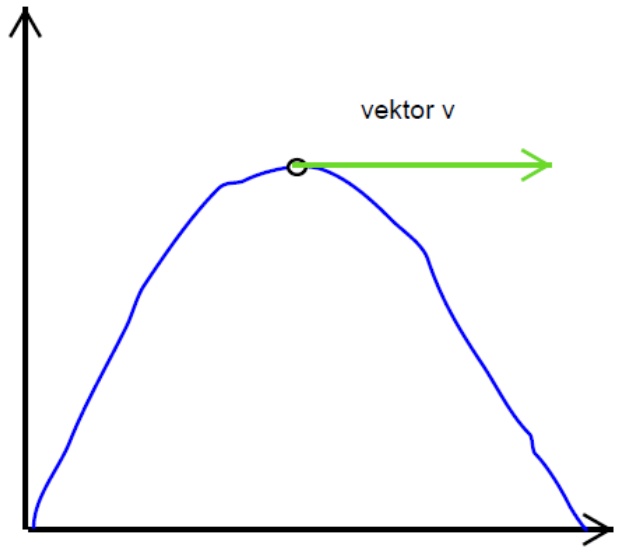


Billede 3

Uafhængighedsprincippet siger, at: Den lodrette og den vandrette bevægelse er uafhængige af hinanden. Det kan ses på ovenstående billede, der viser, at selvom man har skubbet en kugle ud vandret, så ændrer det ikke på den lodrette bevægelse.

$$Bevægelse \begin{cases} x - aksen: bevægelse\ med\ konstant\ hastighed \\ y - aksen: bevægelse\ med\ konstant\ acceleration\ (-g) \end{cases}$$

Kastehøjden



Billede 4

Vektoren er vandret, og dermed er y-værdien = 0, da den ikke har nogen hældning. Det giver, at i toppunktet er vy = 0, og vy = -g*t + v0y

Så derfor er -g*t+voy = 0. Isolerer man y, så får man

$$t = \frac{v_{0y}}{g}$$

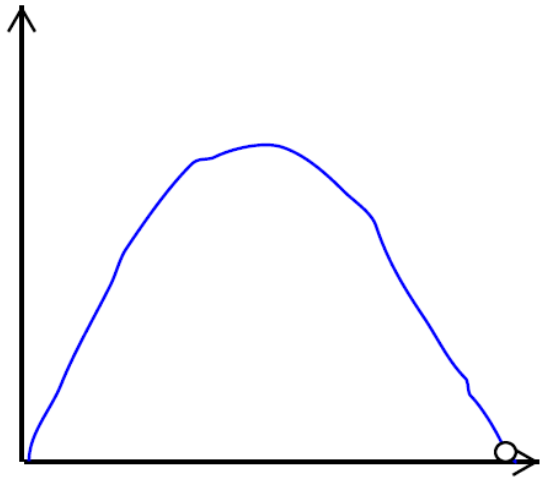
Det indsættes i y(t) for hastighedsvektoren

$$\bar{r} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + v_{0y} * \frac{v_{0y}}{g} = -\frac{1}{2} * \frac{v_{0y}^2}{g} + \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$$

Altså er

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

Rustevidden



Billede 5

Her er y = 0. Man bruger stedvektoren, da den siger noget om, hvorhenne på objektet befinder sig.

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y} * t = 0$$

Dette faktoriseres

$$t * \left(-\frac{1}{2}gt + v_{0y}\right) = 0$$

Nulreglen giver, at

$$t = 0 \text{ el. } -\frac{1}{2}gt + v_{0y} = 0$$

$$t = 0 \text{ el .} -\frac{1}{2}gt = v_{0y} \Rightarrow \frac{1}{2}gt = v_{0y} \Leftrightarrow t = \frac{2v_{0y}}{g}$$

Det vil sige, at objektet rammer jorden til

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}$$

Som indsættes i

$$\bar{r} = v_{0x} * t + x_0$$

som er x(t) for stedvektoren. Altså er

$$x_{max} = v_{0x} * \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 * \sin(2 * \alpha)}{g}$$

Materialer

Materialer brugt i forsøget

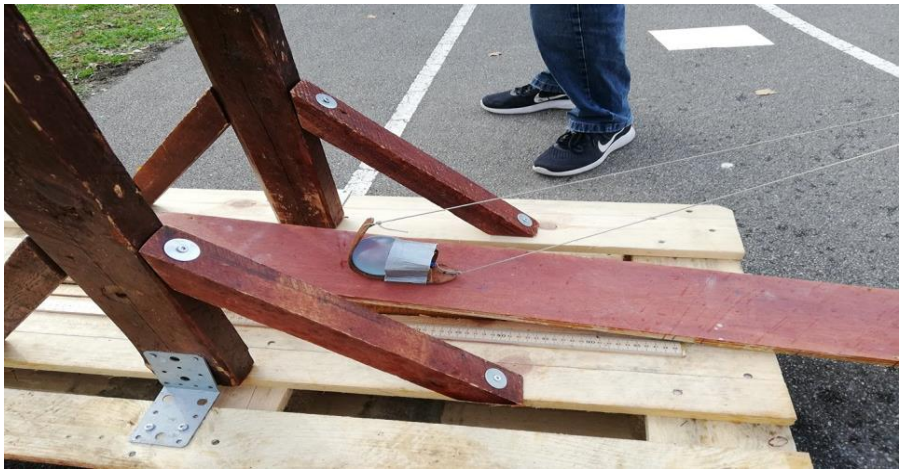
- 1 Blide
- 1 Målebånd (ca. 30m)
- 1 m målestok
- Masser af vandballoner
- mobil med kamera

Fremgangsmåde

Med udgangspunkt i, at bliden var samlet på forhånd

1. Der blev fundet et plant sted for bliden at stå på.
2. Der var sørget for, at der i blidens kasteretning ikke var noget, der kunne gå i stykker
    a. Vi gjorde det på Allerød Gymnasiums græsplæne
3. Et målebånd på 30m blev lagt ud
    a. Målebåndet startede med at måle ved det sted, hvor bliden gerne skulle give slip på vandballonen
4. Desuden anbringes en målestok på 1 m lige under bliden, hvilket skal bruges i videoanalysen.
5. Et bræt lægges så når vandballonen skydes trækkes den hen ad brættet uden at sidde fast i pallens revner.
6. Bliden spændes, så den ligner opstillingen på billedet.

7. Derefter lægges vandballonen således at gaffatapen vender væk fra kaste retningen, som det ses på billedet.



Til sidst affyres vandballonen ved at trække i pinden. Mens der med en Mobil bliver filmet fra en passende afstand, så hele kastet kan ses.

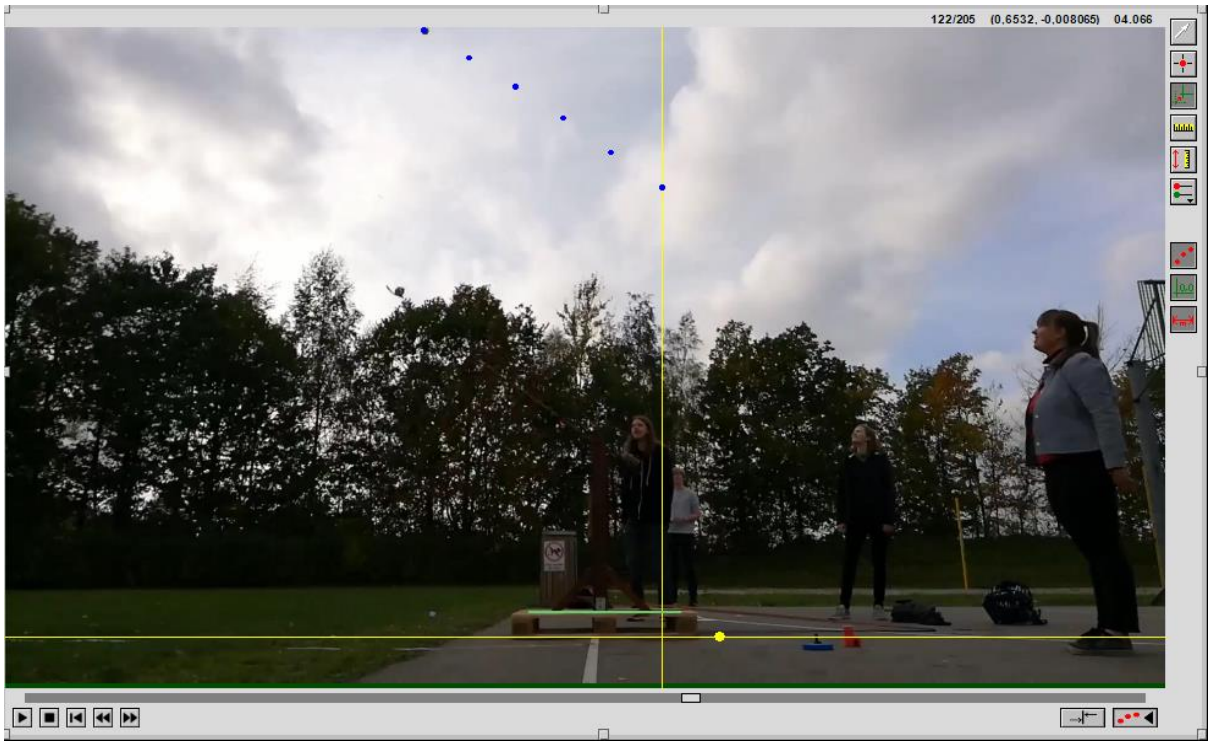
Forbehold, der skal tages

- Man må aldrig stå foran eller bagved bliden, altså man skal stå ved siden af bliden.
- Før man skyder, skal man råbe: “Der skydes!”, så ingen er i tvivl

Resultater og resultatbehandling

Video af startfasen

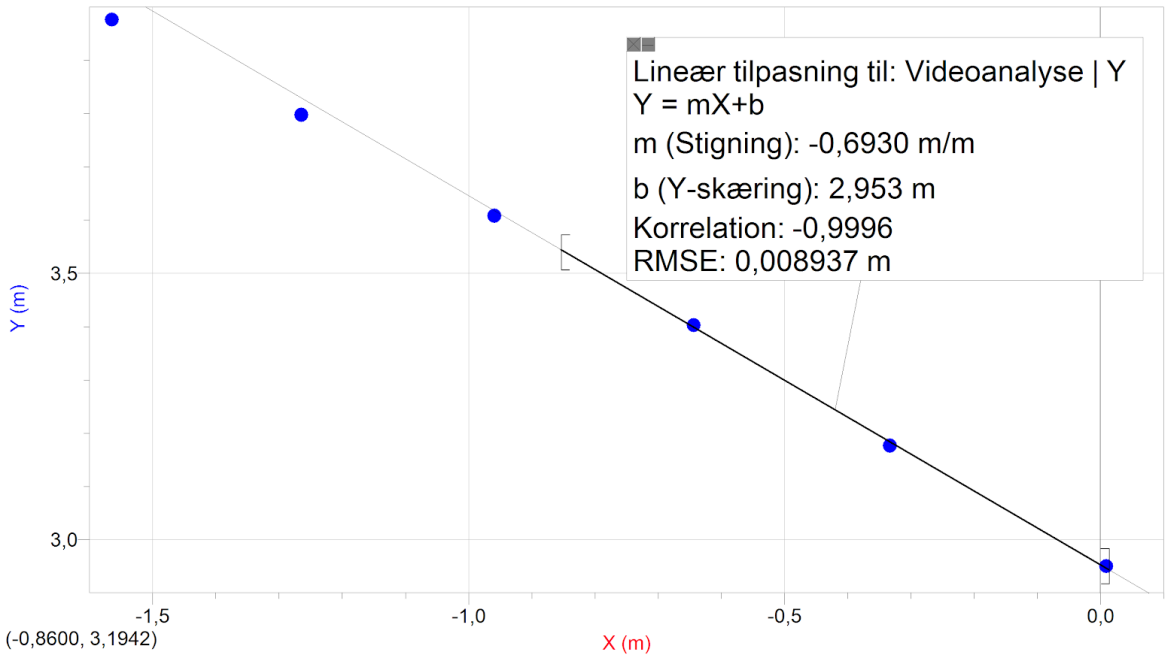
Videoen tæt på opstillingen indsættes i LoggerPro, og der laves en videoanalyse. Bevægelsen går fra højre mod venstre. Koordinatsystemet er placeret, så (0,0) ligger i højde med jorden.



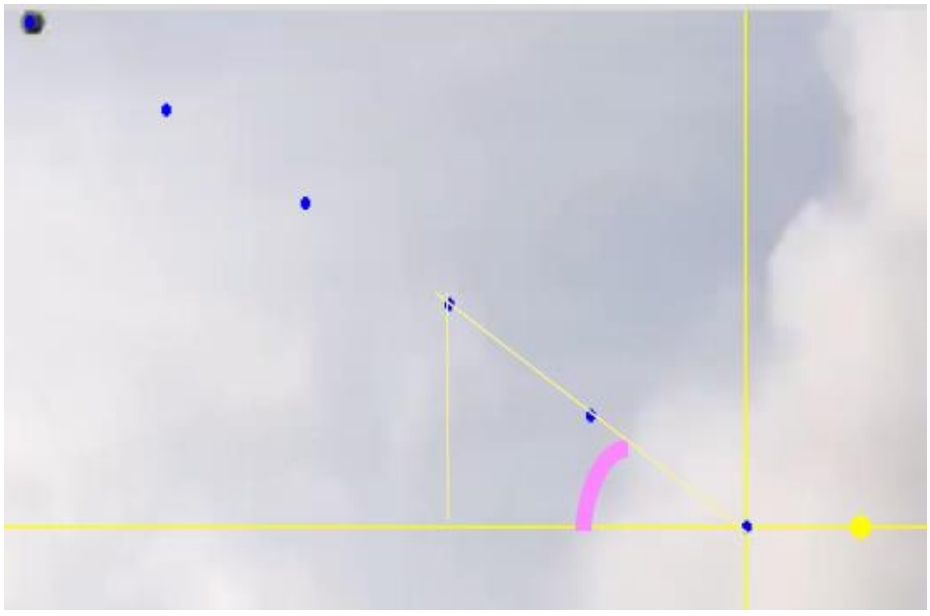
	Videoanalys		
	Tid (s)	X (m)	Y (m)
1	3,900	0,009033	2,950
2	3,933	-0,3331	3,176
3	3,966	-0,6436	3,403
4	4,000	-0,9593	3,608
5	4,033	-1,265	3,797
6	4,066	-1,565	3,976

Det ses, at startstedet, y0, er 2,950 m over jorden.

x- og y-koordinaterne tegnes ind, og det ses, at de første punkter næsten ligger på en ret linje.



Den rette linje følger hastighedsvektoren for v_0, og denne danner en retvinklet trekant med vandret akse, hvor kateterne er x og y. Vinklen mellem x og hypotenusen er elevationen.



Der regnes med de tre første punkter:

|x|=|(-0,6436 m)-0 |= 0,6 m

y= 3,403m - 2,950 m = 0,45 m

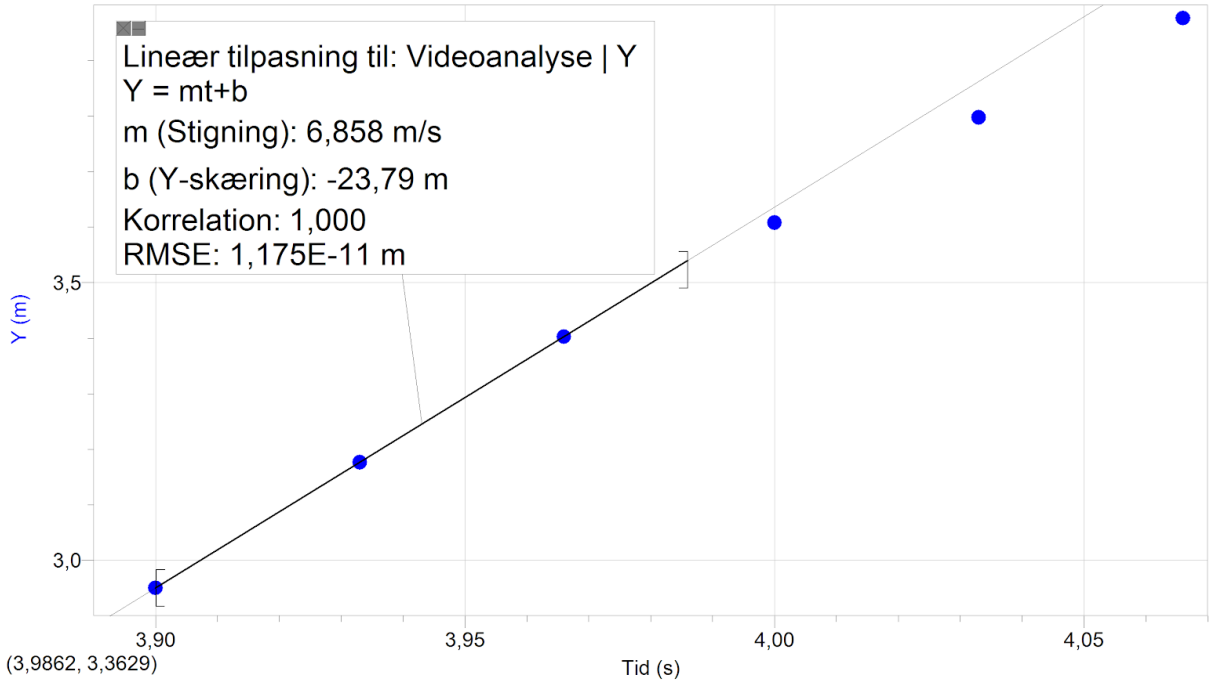
Nu kan elevationen regnes:

=tan-1(y/|x|)=tan-1(0,45 m/0,6 m)=36,9

Dvs. elevationen er 37 grader.

Starthastighed:

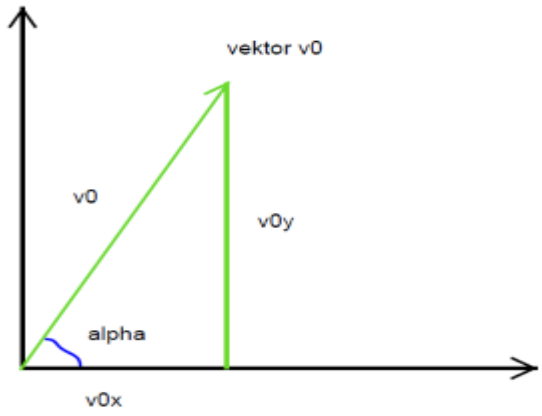
Igen regnes der med de 3 første punkter. Først regnes starthastigheden i y-aksens retning. I et koordinatsystem tegnes værdier for tid og y-koordinaterne. Der laves lineær regression med de første punkter, hældningen er hastigheden:



v_{0y}=a=6,9 m/s

Nu kan starthastigheden regnes, da v0, v0y og v0x danner en retvinklet trekant.

Elevation α



Vektoren til starthastigheden

$$\overline{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 * \cos(\alpha) \\ v_0 * \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$v0 = \frac{v_{0y}}{sin(vinkel)} = \frac{6{,}9\frac{m}{s}}{sin(37)} = 11{,}5\,\frac{m}{s}$$

Dvs. starthastigheden er 11,5 m/s.

Elevationen er =37 grader, og startstedet y0=2,950 m.

Nu kan den forventede længde af kastet (kastevidden) bestemmes. Da y0 ikke er 0, kan man ikke nøjes med formlen for xmax. Når kastevidden er opnået er y=0. Tiden isoleres i y(t)=0

$$y(t) = -½ * g * t^2 + sin(vinkel) * v_0 * t + y_0 = 0$$

Værdier indsættes:

$$0 = -½ * 9{,}82\,\frac{m}{s^2} * t^2 + sin(37) * 11{,}5\,\frac{m}{s} * t + 2{,}950\,m$$

Tiden isoleres:

t=-0,34 s v t=1,75 s

Tiden indsættes i x(t):

$$x(t) = v_0 \cdot cos(vinkel) \cdot t$$

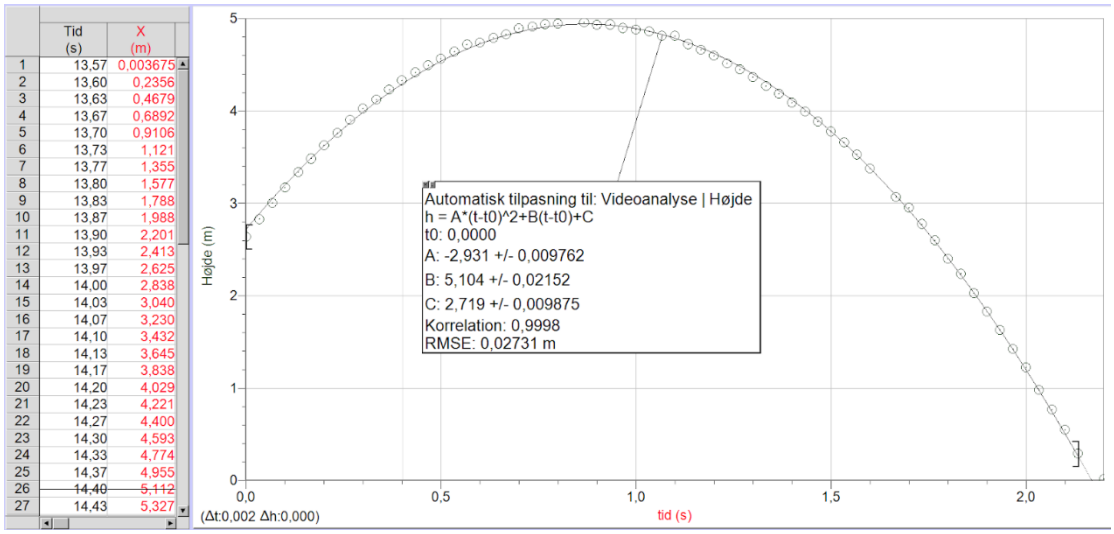
$$x(1{,}75) = 11{,}5\,\frac{m}{s} * cos(37) * 1{,}75\,s = 16{,}1\,m$$

Dvs. den forventede kastevidde er 16 m.

Video af hele kastet

Videoen var meget mørk, så bolden kan ikke ses idet bliden slipper den. Derfor starter målingerne først lidt senere.

Videoanalyse af hele kastet laves i LoggerPro, og der laves andengradsregression med tiden og stedet i y-aksens retning (højden). Der er en fin korrelation, banekurven er altså en parabel.



Udsnit af tabel med data for tid, x og y(højde):

X (m)	Højde (m)	tid (s)
0,003675	2,637	0,000
0,2356	2,827	0,034
0,4679	3,005	0,067
0,6892	3,172	0,100
0,9106	3,339	0,134
1,121	3,482	0,167

Startsted, y0, er højden over jorden, fra målingen går i gang. Det aflæses:

y0=2,637 m

Elevation, , regnes på samme måde som med startfasen. De 2 første (x,y)-punkter benyttes i beregningen.

x0:=0 ▸ 0

x1:=0.2356 ▸ 0.2356

y0:=2.637 ▸ 2.637

y1:=2.827 ▸ 2.827

x= 0,2356 m - 0 m = 0,2356 m

y= 2,827 m - 2,637 m = 0,19 m

Nu kan elevationen regnes:

=tan-1(y/x)=tan-1(0,19 m/0,2356 m)=38,9

Dvs. elevationen er 39 grader.

For at beregne starthastigheden v0, regnes starthastigheden i y's retning. Der regnes med de to første punkter. Hastigheden svarer til hældningen, som regnes:

v0y=a=y/t

y=0,19 m

t=0,03 s - 0 s=0,03 s

Værdier indsættes, og v0y regnes:

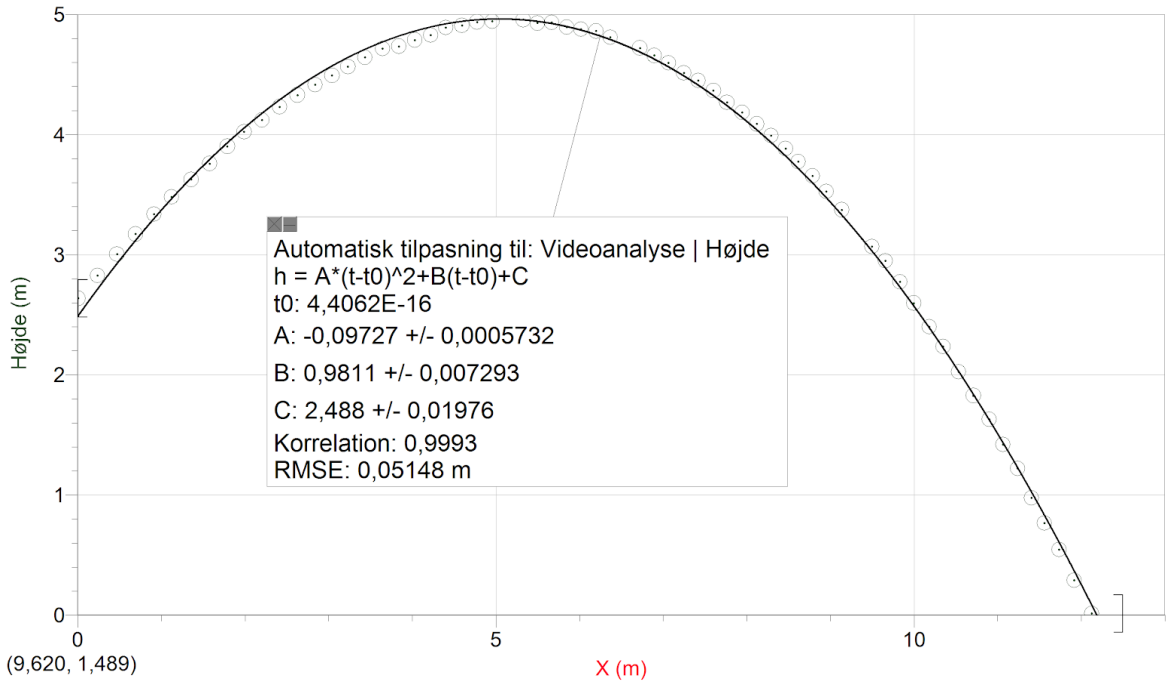
v0y=a=y/t=0,19 m/0,03 s=6,33 m/s

Nu regnes starthastigheden v0:

v0=v0y/sin(vinkel)=(6,33 m/s)/sin(38,9)=10,1 m/s

Dvs. startsted, y0, er 2,6 m, elevationen, , er 39 grader og starthastigheden, v0, er 10 m/s.

(x,y)-graf:



Når bolden lander, er x maksimal, dette er kastevidden, hvor y=0. Dvs. xmax er når kurven skærer x-aksen. Det aflæses til at være: xmax=12,1 m
Kastevidden er målt til 12,1 m. Kastevidden er fra vores måling begynder, ikke fra bliden slipper bolden.

Kastevidde kan også beregnes ud fra målt startsted, elevation og starthastighed.
Først regnes tiden, hvor y(t)=0.
y(t)=-½*g*t^2+sin()*v0*t+y0=0
Værdier indsættes:
0=-½ *9,82 m/s^2*t^2+sin(38,9)*10 m/s*t+2,637 m
Tiden isoleres:
t=-0,33 s v t=1,62 s
Tiden indsættes i x(t):
x(t)=v0*cos()*t
x(1,62)=10 m/s*cos(38,9)*1,62 s=12,7 m

Den målte kastevidde afviger fra den beregnede:
(12,1 m -12,7 m)/12,7 m=-4,7%

<u>Fejlkilder</u>

- Logger Pro usikkerhed
- Da vi kiggede på optagelserne af kastet med bliden, kunne vi se at kameraet rystede forholdsvis meget, dette er et problem, da det går ind og påvirker kastet af vandballonen. For at undgå dette kunne man have spændt kameraet fast til et stativ, på den måde ville man ikke få rystede og upræcise optagelser.
- En anden fejlkilde er belysningen under filmen/samt evnen til at se vandballonen på filmen. Da vi filmede var der overskyet, uden meget sol. Vi filmede med solen i ryggen, hvis vi havde filmet fra den anden side havde der været en bedre belysning, hvilket ville have gjort optagelserne mere tydelige. En anden ting man kunne have gjort, var at bruge et mere tydeligt objekt, f.eks. noget der var selvlysende. Under video analysen var det meget svært at se hvor vandballonen befandt sig i starten og slutingen af kastet.

- Afvigelsen for kastevidden skyldes bl.a., at vi ikke har taget højde for luftmodstand i vores beregning. Luftmodstanden er en kraft, der virker modsat bevægelsens retning, den bremser den altså.

Diskussion

Der er mange faktorer i opstillingen, der kunne ændres, hvorved kastevidden ville øges. En elevation på 45 grader giver den maksimale kastevidde. Ved videre eksperimentering kunne man arbejde på, at bolden slippes af bliden så elevationen blev 45 grader.
Vi oplevede i begyndelsen, at bolden blev sluppet for sent. Dette resulterede i en meget lille elevation, så bolden blev hamret ned i jorden, og kastevidden blev meget lille.
Derudover kunne snorlængde og massen af lodderne varieres. Flere lodder ville oplagre mere potentiel energi, der kunne bruges på at slynge bolden afsted. Dog ville flere lodder belaste stangen, og der ville komme en risiko for, at stangen knækker.

Hvordan ballonen skal ligge i "skydearmen"

Billede af hele bliden

Konklusion

Ved undersøgelse af et skråt kast med blide, bestemte vi følgende værdier:

Elevation: =39grader

Starthastighed: v0=10 m/s

Ud fra disse værdier beregnede vi den forventede kastevidde til xmax=12,7 m.

Vi målte den til xmax=12,1 m

Der var altså en afvigelse på -4,7%.